

# ÉPREUVE N° 2

DURÉE : 2 heures — COEFFICIENT : 4

*Le candidat traitera obligatoirement le sujet correspondant à l'option formulée dans sa demande d'admission à concourir.*

*Il trouvera ces sujets aux pages suivantes du présent fascicule :*

- Page 3 : Mathématiques.
- Page 5 : Géographie économique.
- Page 5 : Droit commercial.
- Page 5 : Droit civil.
- Page 6 : Comptabilité commerciale.

## PREMIER SUJET

### MATHÉMATIQUES

*L'usage de la calculatrice et du convertisseur est autorisé*

Les résultats non justifiés par des explications mathématiques précises seront sans valeur

*Les parties I, II et III sont indépendantes.*

#### I

$k$  désigne un nombre réel fixé non nul.

$(O, \vec{i}, \vec{j})$  est un repère orthonormé du plan  $P$ .

Soit  $f_k$  la fonction numérique de la variable réelle  $x$  telle que  $f_k(x) = -x \ln(kx)$  pour tout  $x$  dans l'ensemble de définition de  $f_k$ . ( $\ln$  désigne la fonction logarithme népérien).

A. 1. Préciser, suivant les valeurs de  $k$ , l'ensemble de définition  $\mathcal{D}_k$  de  $f_k$ .

2. a. Démontrer que la fonction  $f_k$  est dérivable en tout point de  $\mathcal{D}_k$  et déterminer sa dérivée.

b. Démontrer que  $f_k$  a une limite finie  $\ell$  que l'on précisera, lorsque  $x$  tend vers zéro dans  $\mathcal{D}_k$ .

3. Soit  $\bar{f}_k$  la fonction telle que :

$$\bar{f}_k(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathcal{D}_k, \bar{f}_k(x) = f_k(x).$$

$\bar{f}_k$  est-elle dérivable à droite ou à gauche en 0?

4. a. Étudier les variations de la fonction  $\bar{f}_1$ .

b. Construire sa représentation graphique  $(\bar{C}_1)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

c. Soit  $F_1$  la fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie par  $F_1(x) = \frac{x^2}{2} \left( \frac{1}{2} - \ln x \right)$ . Montrer que  $F_1$  est une primitive de  $\bar{f}_1$  sur  $]0, +\infty[$ .

d. Calculer l'aire du domaine compris entre la droite  $(O, \vec{i})$ , la courbe  $(\bar{C}_1)$  et les droites d'équations respectives  $x = \frac{1}{e}$  et  $x = 1$  ( $e$  est le nombre réel dont le logarithme népérien est égal à 1).

B. On suppose, dans toute cette partie, que  $k$  est strictement supérieur à zéro.

1. Résoudre dans  $]0, +\infty[$  l'inéquation  $f_k(x) > 0$  et l'inéquation  $f_k(x) - x > 0$ .
2. Démontrer que, si une suite réelle a pour premier terme  $u_0 = \frac{1}{ke}$  et vérifie la relation :

$$u_n = f_k(u_{n-1}), \text{ si } n \in \mathbb{N} \text{ et } n \geq 1,$$

alors cette suite est constante.

C. Soit  $\mathcal{E}$  l'ensemble des fonctions numériques dérivables sur  $]0, +\infty[$  et telles que :

$$\forall a \in ]0, +\infty[, \forall b \in ]0, +\infty[, f(ab) = af(b) + bf(a).$$

1. Démontrer que toute fonction  $\alpha f_1$ , où  $\alpha$  est un nombre réel fixé, appartient à  $\mathcal{E}$ .
- 2.a. Démontrer que, si  $f$  appartient à  $\mathcal{E}$ , alors  $f(1) = 0$ .
- b. Démontrer que, si  $f$  appartient à  $\mathcal{E}$ , alors :

$$(1) \quad \forall x \in ]0, +\infty[, xf'(x) - f(x) = xf'(1).$$

- c. En remarquant que la proposition (1) ci-dessus est équivalente à :

$$\forall x \in ]0, +\infty[, \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{f'(1)}{x}, \text{ calculer } \frac{f(x)}{x} \text{ pour tout } x \text{ dans } ]0, +\infty[.$$

- d. En déduire que, si  $f$  appartient à  $\mathcal{E}$ , alors  $f$  est de la forme  $\alpha f_1$ , où  $\alpha$  est un nombre réel fixé.

## II

Une variable aléatoire  $X$  prend les valeurs  $1, -2, 3$  avec des probabilités respectives  $\ln \alpha, \ln \beta, \ln \gamma$  où  $\alpha, \beta, \gamma$  sont, dans cet ordre, les termes consécutifs d'une suite géométrique.

On suppose que si  $E(X)$  désigne l'espérance mathématique de  $X$ , on a :  $E(X) = 1$ .

1. Calculer  $\alpha, \beta, \gamma$ .
2. Calculer la variance  $V(X)$ .
3. Calculer l'écart-type  $\sigma$  de  $X$ .

## III

Résoudre dans  $\mathbb{R}$ , en fonction des valeurs du paramètre réel  $a$ , l'équation suivante :

$$(E) : e^x + e^{-x} = a.$$